Méthode multi-échelle avec patchs pour la propagation d'incertitudes localisées dans les modèles stochastiques

Florent Pled, Mathilde Chevreuil, Anthony Nouy, Elias Safatly

CSMA 2013
11e Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2013

Méthode multiéchelle avec patchs pour la propagation d'incertitudes localisées dans les modèles stochastiques

Florent PLED [1*], Mathilde CHEVREUIL [1], Anthony NOUY [1], Elias SAFATLY [1]

[1] GeM - UMR CNRS 6183, LUNAM Université / Université de Nantes / École Centrale Nantes,
{florent.pled@ec-nantes.fr, mathilde.chevreuil@univ-nantes.fr,anthony.nouy@ec-nantes.fr,elias.safatly@ec-nantes.fr}

Résumé — Nous présentons une stratégie basée sur une méthode multiéchelle avec patch afin de traiter des problèmes stochastiques où les sources d'incertitudes sont nombreuses et dont les modèles associés sont des modèles multiéchelles complexes de grande dimension stochastique. La méthode exploite l'aspect localisé des incertitudes en séparant les échelles ce qui permet d'améliorer à la fois le conditionnement du problème et la convergence des méthodes d'approximation de tenseur utilisées pour résoudre les problèmes stochastiques de grande dimension aux niveaux local et global.
Mots clés — Quantification des incertitudes, Multiéchelle, Zoom numérique, Approximation de tenseur, Grande dimension

De nombreuses méthodes ont été proposées ces vingt dernières années pour la propagation des incertitudes dans les modèles physiques utilisant les approches fonctionnelles [1, 2, 3, 4]. Alors que ces approches sont maintenant relativement bien répandues et maîtrisées, un intérêt pour les modèles stochastiques multiéchelles a émergé. Ainsi des méthodes déterministes consacrées au couplage d'échelles ont été étendues aux problèmes stochastiques avec incertitudes. Cependant la propagation des incertitudes dans les modèles stochastiques multiéchelles demeure un défi car ce sont des modèles de grande dimension par nature. De plus les modèles numériques monoéchelle souffrent de la complexité multiéchelle des solutions qui présentent un contenu spectral très riche.

Dans ce travail nous nous intéressons aux problèmes multiéchelles pour lesquels les incertitudes sont localisées dans un patch Λ représenté sur la figure 1. Les incertitudes peuvent apparaître dans les propriétés matérielles, les termes sources ou encore la géométrie. Il s'agit donc de proposer une méthode efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques multiéchelles définies sur un domaine éventuellement incertain $\Omega(\xi)$, où $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \Xi$ désignent les paramètres aléatoires.

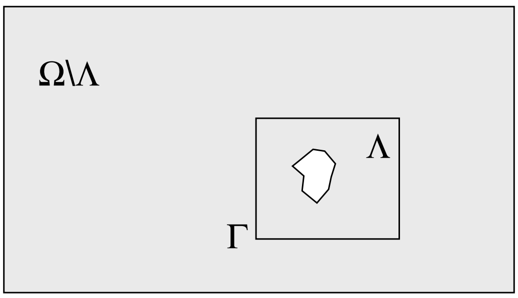
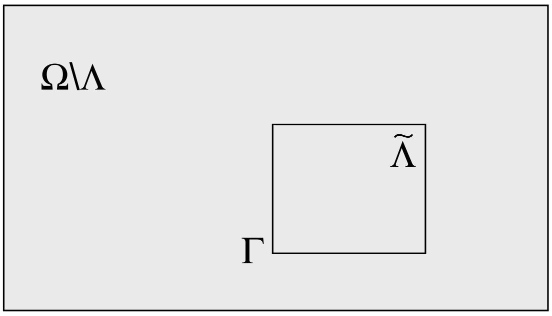
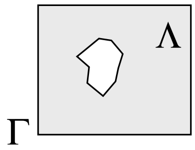


Fig. 1 – Patch $\Lambda \subset \Omega$ contenant les incertitudes localisées et interface $\Gamma = \partial(\Omega\backslash\Lambda) \cap \partial\Lambda$.

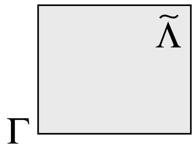
En présence de nombreuses sources d'incertitudes localisées, des approches dédiées doivent être développées afin de s'attaquer à la grande dimension et à la complexité des modèles multiéchelles associés. Nous proposons une méthode multiéchelle avec patch qui exploite le caractère localisé des incertitudes et qui est détaillée dans [5]. Il s'agit d'une méthode de type semi-Schwartz-Lagrange (voir [7]) associée à un algorithme itératif global-local qu'on trouve également dans [6, 8]. Dans son extension au cadre stochastique, un algorithme itératif efficace est proposé et requiert la résolution d'une séquence de problèmes globaux et de problèmes locaux. Les problèmes globaux à l'échelle macro sont des problèmes simples à opérateur déterministe définis sur un domaine fictif $\tilde{\Omega}$ (figure 2(a)), tandis que les problèmes locaux à l'échelle micro sont définis sur le patch Λ (figure 2(b)).



(a) Domaine fictif $\widetilde{\Omega} = (\Omega \setminus \Lambda) \cup \widetilde{\Lambda}$ avec patch fictif $\widetilde{\Lambda}$ tel que $\partial\widetilde{\Lambda} = \Gamma$.



(b) Patch Λ avec une éventuelle frontière interne.



(c) Patch fictif $\widetilde{\Lambda}$ sans frontière interne.

Fig. 2 – Illustration des différents domaines.

Dans le cas où les incertitudes au niveau micro portent sur la géométrie, des reformulations spécifiques des problèmes locaux basées sur les méthodes de domaine fictif sont introduites. Une méthode de domaine fictif conduit à la reformulation du problème local sur un patch fictif $\tilde{\Lambda}$ (figure 2(c)) et par conséquent la formulation du problème sur un espace produit de tenseurs [9, 10, 11]. Outre la possibilité d'utiliser des espaces d'approximation différents au niveau déterministe pour les problèmes globaux et locaux (approximations grossière au niveau macro et fines au niveau micro), la séparation des échelles offre également l'avantage d'améliorer le conditionnement du problème. Afin de s'attaquer à la grande dimension émanant de ces problèmes multiéchelles avec de nombreuses sources d'incertitudes, les problèmes globaux et locaux sont résolus à l'aide de méthodes d'approximation de tenseurs permettant la représentation séparée de rang faible des solutions stochastiques paramétriques $u(\xi_1, \cdots, \xi_d)$ de grande dimension. Les propriétés de ces méthodes d'approximation de tenseurs, qui sont étroitement liées aux décompositions spectrales, profitent de la séparation d'échelle, et l'introduction de ces approximations dans l'approche multiéchelle est un point clé pour l'efficacité de la méthode dans son ensemble. Différents formats de représentation de tenseur sont exploités [12]. La décomposition canonique hiérarchique introduite dans [13, 14] est particulièrement adaptée à notre problème puisqu'elle donne des représentations de rang très faible.

Références

[1] H. G. Matthies. Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 88(11) :849–873, 2008.

[2] A. Nouy. Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3) :251–285, 2009.

[3] D. Xiu. Fast numerical methods for stochastic computations : a review. *Communication in Computational Physics*, 5(2-4) :242–272, 2009.

[4] O. P. Le Maître and O. M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification : With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, 1st edition, 2010.

[5] M. Chevreuil, A. Nouy, and E. Safatly. A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :255–274, 2013.

[6] L. Gendre, O. Allix, and P. Gosselet. A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87 :889–905, 2011.

[7] A. Lozinski. *Méthodes numériques et modélisation pour certains problèmes multi-échelles*. Université Paul Sabatier, Toulouse 3, 2010.

[8] C. Hager, P. Hauret, P. Le Tallec, and B. I. Wohlmuth. Solving dynamic contact problems with local refinement in space and time. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201 - 204(0) :25 – 41, 2012.

[9] C. Canuto and T. Kozubek. A fictitious domain approach to the numerical solution of pdes in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, 107(2) :257–293, 2007.

[10] A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs, and N. Moës. An eXtended Stochastic Finite Element Method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) :4663–4682, 2008.

[11] A. Nouy, M. Chevreuil, and E. Safatly. Fictitious domain method and separated representations for the solution of boundary value problems on uncertain parameterized domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :3066–3082, 2011.

[12] W. Hackbusch. *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*, volume 42 of *Series in Computational Mathematics*. Springer, 2012.

[13] A. Nouy. Proper Generalized Decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :403–434, 2010.

[14] M. Chevreuil and A. Nouy. Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89 :241–268, 2012.